

# Spectre et géométrie conforme des variétés compactes à bord

Pierre Jammes

RÉSUMÉ.— On montre que sur toute variété compacte  $M^n$  à bord, il existe une classe conforme  $C$  telle que pour toute métrique  $g \in C$ ,  $\lambda_1(M^n, g) \text{Vol}(M^n, g)^{2/n} < n \text{Vol}(S^n, g_{\text{can}})^{2/n}$  et  $\sigma_1(M, g, \rho) \mathcal{M}(\partial M) \text{Vol}(M)^{\frac{2-n}{n}} < n \text{Vol}(S^n, g_{\text{can}})^{2/n}$ , où  $\lambda_1(M^n, g)$  désigne la première valeur propre du laplacien avec condition de Neumann,  $\sigma_1(M, g, \rho)$  la première valeur propre de Steklov pour la densité  $\rho$  sur  $\partial M$  et  $\mathcal{M}(\partial M) = \int_{\partial M} \rho \, dv_g$ . La démonstration est basée sur une décomposition en anse de la variété. On montre aussi que le volume conforme de  $(M, C)$ , l'invariant de Friedlander-Nadirashvili et le volume de Möbius de  $M$  sont ceux de la sphère  $(S^n, g_{\text{can}})$ . Si  $M$  est un domaine euclidien, hyperbolique ou sphérique, alors  $C$  est la classe conforme de la métrique canonique.

Mots-clefs : première valeur propre de Neumann et de Steklov, volume conforme.

ABSTRACT.— We prove that on any compact manifold  $M^n$  with boundary, there exist a conformal class  $C$  such that for any riemannian metric  $g \in C$ ,  $\lambda_1(M^n, g) \text{Vol}(M^n, g)^{2/n} < n \text{Vol}(S^n, g_{\text{can}})^{2/n}$  and  $\sigma_1(M, g, \rho) \mathcal{M}(\partial M) \text{Vol}(M)^{\frac{2-n}{n}} < n \text{Vol}(S^n, g_{\text{can}})^{2/n}$ , where  $\lambda_1(M^n, g)$  denotes the first positive eigenvalue of the Neumann laplacian on  $(M, g)$ ,  $\sigma_1(M, g, \rho)$  the first positive Steklov eigenvalue for the density  $\rho$  on  $\partial M$ , and  $\mathcal{M}(\partial M) = \int_{\partial M} \rho \, dv_g$ . The proof relies on a handle decomposition of the manifold. We also prove that the conformal volume of  $(M, C)$  is  $\text{Vol}(S^n, g_{\text{can}})$ , and that the Friedlander-Nadirashvili and the Möbius volume of  $M$  are equal to those of the sphere. If  $M$  is a domain in a space form,  $C$  is the conformal class of the canonical metric.

Keywords : first Neumann and Steklov eigenvalue, conformal volume.

MSC2010 : 35P15, 58J50

## 1. Introduction

Considérons une variété riemannienne compacte  $(M^n, g)$ , avec ou sans bord, et notons  $\lambda_1(M, g) > 0$  la première valeur propre non nulle du laplacien sur  $M$ , en posant les condition de Neumann s'il y a un bord. Il découle des travaux de J. Hersch [He70] que sur la sphère de dimension 2, on a

$$\lambda_1(S^2, g) \text{Vol}(S^2, g) \leq 8\pi, \quad (1.1)$$

l'égalité ayant lieu pour la métrique canonique. Mais on sait que cette inégalité ne s'étend pas aux autres surfaces closes (les premiers exemples ont été donnés par P. Buser [Bu84]. Voir aussi [BM01] et les références qui y sont données) On sait que la borne supérieure de  $\lambda_1(M^2, g) \text{Vol}(M^2, g)$  vaut  $12\pi$  sur le plan projectif ([LY82]),  $8\pi^2/\sqrt{3}$  sur le tore ([Na96], [Gi09]) et que sur la bouteille de Klein elle s'exprime en fonction d'une intégrale elliptique ([ESGJ06]). On peut en déduire facilement à l'aide de [CES03] que cette borne supérieure est minorée par  $12\pi$  sur les surfaces closes autres que la sphère. En dimension supérieure ou égale à 3, on sait que  $\lambda_1(M^n, g) \text{Vol}(M^n, g)^{2/n}$  n'est pas borné (voir [Ta79], [Mu80], [CD94]).

Récemment, G. Kokarev et N. Nadirashvili ont donné une généralisation de l'inégalité de Hersch sur les surfaces orientable à bord sous des hypothèses conformes. Si  $g$  est une métrique sur  $M$ , la classe conforme de  $g$  est définie par  $[g] = \{hg, h \in C^\infty, h > 0\}$ .

**Théorème 1.2 ([KN10]).** *Soit  $M^2$  une surface orientable compacte à bord. Il existe une classe conforme  $C$  sur  $M^2$  telle que pour toute métrique  $g \in C$ , on a  $\lambda_1(M^2, g) \text{Vol}(M^2, g) \leq 8\pi$ .*

Le but de cet article est de démontrer une généralisation de ce résultat aux variétés compactes à bord (orientables ou non) de dimension quelconque. On va aussi montrer un énoncé du même type pour la première valeur propre du spectre de Steklov. Rappelons que si  $\rho \in C^\infty(\partial M)$  est une fonction sur le bord de  $M$ , le spectre de Steklov est la suite  $0 = \sigma_0(M, g, \rho) < \sigma_1(M, g, \rho) \leq \sigma_2(M, g, \rho) \dots$  des réels  $\sigma$  pour lesquels le problème de Steklov, défini par les équations  $\Delta f = 0$  dans  $M$  et  $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f$  sur  $\partial M$ , admet une solution (voir le paragraphe 2.2 pour plus de détails).

**Théorème 1.3.** *Soit  $M^n$  une variété compacte à bord de dimension  $n \geq 2$ . Il existe une classe conforme  $C$  sur  $M^n$  telle que pour toute métrique  $g \in C$ ,*

$$\lambda_1(M, g) \text{Vol}(M, g)^{2/n} < n\omega_n^{2/n} \quad (1.4)$$

et

$$\sigma_1(M, g, \rho) \mathcal{M}(\partial M) \text{Vol}(M)^{\frac{2-n}{n}} < n\omega_n^{2/n}, \quad (1.5)$$

où  $\omega_n = \text{Vol}(S^n, g_{can})$  et  $\mathcal{M}(\partial M) = \int_{\partial M} \rho \, dv_g$  désigne la masse totale de la densité  $\rho$ .

Si  $M$  est un domaine euclidien, sphérique ou hyperbolique, alors ces inégalités sont vraies pour la classe conforme de la métrique canonique.

**Remarque 1.6.** L'inégalité (1.4) est optimale : on peut assez facilement faire tendre la première valeur propre vers celle de la sphère à volume fixée (voir par exemple [CES03]). La situation est différente pour l'inégalité (1.5). Par exemple, selon l'inégalité de Weinstock [We54], qui est un analogue de l'inégalité de Hersch pour le problème de Steklov, on a  $\sigma_1(M, g, \rho) \mathcal{M}(\partial M) \leq 2\pi$  si  $M$  est homéomorphe à un disque.

**Remarque 1.7.** En dimension 2, ce résultat améliore celui de Kokarev et Nadirashvili sur deux points : l'inégalité (1.4) est stricte et on n'a pas besoin de supposer que la surface est orientable.

**Remarque 1.8.** Si  $M$  est un domaine de  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$  ou  $H^n$ , on obtient une majoration de  $\lambda_1(M, g)$  en fonction du volume qui est plus faible que celles de Szegö-Weinberger ou de Ashbaugh-Benguria [AB95] mais qui vaut pour toute métrique conforme. Dans ce contexte, on peut interpréter l'inégalité (1.4) comme une inégalité de Szegö-Weinberger conforme. Par ailleurs, Colbois, El Soufi et Girouard ont donné dans [CESG11] une majoration de  $\sigma_k(M) \mathcal{M}(\partial M) \text{Vol}(M)^{\frac{2-n}{n}}$  sur les domaines de  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$  ou  $H^n$  qui ne dépend que de  $n$  et  $k$ . La majoration (1.5) ne vaut que pour  $k = 1$ , mais elle a l'avantage d'être plus explicite et conformément invariante.

L'inégalité (1.4) est spécifique à la condition de Neumann. Avec la condition de Dirichlet, on peut faire tendre la première valeur propre vers l'infini dans une classe conforme à volume fixé :

**Théorème 1.9.** *Soit  $M^n$  une variété compacte à bord de dimension  $n \geq 2$ . Pour toute classe conforme  $C$  sur  $M^n$ , on a*

$$\sup_{g \in C} \lambda_1^D(M^n, g) \text{Vol}(M^n, g)^{2/n} = +\infty$$

où  $\lambda_1^D(M^n, g)$  désigne la première valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet.

On montrera en fait ce résultat pour le laplacien agissant sur les formes différentielles de degré  $p \geq 2$ , le laplacien de Neumann correspondant au cas  $p = 0$  et le laplacien de Dirichlet au cas  $p = n$ .

Comme l'article [KN10] utilise des techniques spécifiques à la dimension 2 (invariance conforme de la norme  $L^2$  du gradient, fonctions méromorphes sur des courbes hyperelliptiques), la généralisation du théorème 1.2 en grande dimension peut surprendre. Le principe de la démonstration, déjà utilisé dans [Ja08], est de faire appel à la théorie du volume conforme développée

dans [LY82] et [ESI86] et d'utiliser une décomposition en anses de la variété. Dans le cas du spectre de Steklov, on passera par l'intermédiaire du volume conforme relatif introduit par A. Fraser et R. Schoen dans [FS11].

La même technique va nous permettre de calculer certains invariants des variétés compactes à bord. Rappelons d'abord quelques définitions. Le volume conforme est un invariant conforme des variétés compactes défini par

$$V_c(M, [g]) = \inf_{\substack{m \geq 1 \\ \varphi: (M, [g]) \hookrightarrow S^m}} \sup_{\gamma \in G_m} \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)), \quad (1.10)$$

l'application  $\varphi$  parcourant l'ensemble des immersions conformes de  $(M, [g])$  dans  $S^m$ , et  $G_m$  désignant le groupe de Möbius de dimension  $m$ , c'est-à-dire le groupe des difféomorphismes conformes de  $S^m$ . Dans [FN99], L. Friedlander et N. Nadirashvili ont défini un nouvel invariant différentiable des variétés compactes en posant

$$\nu(M) = \inf_g \sup_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_1(M, \tilde{g}) \text{Vol}(M, \tilde{g})^{2/n}. \quad (1.11)$$

Enfin, j'ai défini dans [Ja08] le volume de Möbius d'une variété compacte par

$$V_{\mathcal{M}}(M) = \inf_{\varphi: M \hookrightarrow S^m} \sup_{\gamma \in G_m} \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)), \quad (1.12)$$

la différence avec le volume conforme étant que  $\varphi$  parcourt l'ensemble de toutes les immersions de  $M$  dans  $S^m$  sans restriction. Il découle des propriétés du volume conforme que  $\nu(M) \leq n V_{\mathcal{M}}(M)^{2/n}$ . On peut alors montrer :

**Théorème 1.13.** *Soit  $M^n$  une variété compacte à bord. Alors*

1. *Il existe une classe conforme  $C$  sur  $M$  telle que  $V_c(M, C) = \omega_n$  ;*
2.  *$\nu(M) = n \omega_n^{2/n}$  ;*
3.  *$V_{\mathcal{M}}(M) = \omega_n$ .*

*De plus, si  $M$  est un domaine euclidien, sphérique ou hyperbolique, alors  $C$  est la classe conforme de la métrique canonique.*

Ces résultats contrastent avec le cas des variétés compactes sans bord. En effet, pour les variétés closes, on a toujours  $V_c(M, C) \geq \omega_n$  et on conjecture que l'égalité n'a lieu que pour la sphère ronde. On sait qu'on a aussi  $\nu(M) \geq n \omega_n^{2/n}$  mais il existe très peu de variétés sur lesquelles on sait calculer cet invariant, les seuls exemples sont  $\nu(S^n) = n \omega_n^{2/n}$ ,  $\nu(\mathbb{R}P^2) = 12\pi$  (cela découle du fait que  $\mathbb{R}P^2$  n'admet qu'une seule classe conforme) et

$\nu(T^2) = \nu(K^2) = 8\pi$  où  $K^2$  désigne la bouteille de Klein (voir [Gi09]). Enfin, la seule variété close dont on connaît le volume de Möbius est la sphère. En général, on sait seulement que  $V_{\mathcal{M}}$  est minoré par  $\omega_n$  et uniformément majoré à dimension fixée (voir [Ja08]).

Comme exemple d'application du théorème 1.13, on peut déduire une majoration de la deuxième valeur propre des opérateurs de Schrödinger sur les domaines euclidiens, sphériques et hyperboliques en utilisant le résultat d'El Soufi et Ilias [ESI92] :

**Corollaire 1.14.** *Soit  $M$  une variété conforme à un domaine compact de  $\mathbb{R}^n$  (par exemple domaine de  $S^n$  ou  $H^n$ ) et  $V \in C^\infty(M)$ . La deuxième valeur propre de l'opérateur de Schrödinger  $\Delta + V$  sur  $M$  avec condition de Neumann est majorée par  $n(\frac{\omega_n}{\text{Vol}(M)})^{2/n} + \bar{V}$ , où  $\bar{V}$  désigne la valeur moyenne de  $V$ .*

On commencera par quelques rappels sur le volume conforme et ses liens avec le spectre de Neumann et de Steklov dans la section 2, on démontrera au passage les théorèmes 1.3 et 1.13 dans le cas des domaines de  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$  et  $H^n$ . On traitera ensuite le cas des surfaces, pour lequel les arguments topologiques sont plus simples qu'en dimension quelconque, dans la section 3. Puis nous verrons le cas général dans la section 4. Enfin, la dernière section sera consacrée à la démonstration du théorème 1.9.

Je remercie B. Colbois d'avoir porté l'article [KN10] à ma connaissance.

## 2. Spectre et volume conforme

### 2.1. Première valeur propre de Neumann

Les démonstrations des théorèmes 1.3 et 1.13 reposent sur les propriétés des immersions conformes dans la sphère et du volume conforme étudiées dans [LY82] et [ESI86]. On utilisera en particulier le résultat suivant, en notant  $G_m$  le groupe de Möbius de dimension  $m$ , c'est-à-dire le groupe des difféomorphismes conformes de la sphère  $S^m$ .

**Lemme 2.1 ([ESI86]).** *Soit  $(M^n, g)$  une variété compacte et  $\varphi : M \mapsto S^m$  une immersion conforme de  $M$  dans la sphère de dimension  $m$ . Il existe un élément  $\gamma$  du groupe de Möbius  $G_m$  tel que  $\lambda_1(M, g) \text{Vol}(M, g)^{2/n} \leq n \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M))^{2/n}$ .*

**Remarque 2.2.** Ce lemme n'est pas énoncé explicitement dans [LY82] ou [ESI86], mais sa démonstration est contenue dans celle du théorème 2.2 de [ESI86]. Par ailleurs, cette majoration est obtenue en appliquant le principe

du min-max à des fonctions test qui ne vérifient *a priori* aucune condition de bord. Elle est donc valable pour le laplacien avec la condition de Neumann mais pas la condition de Dirichlet.

**Remarque 2.3.** Dans [LY82] et [ESI86], le volume de  $\gamma \circ \varphi(M)$  est majoré par sa borne supérieure sous l'action de  $G_m$ . Pour les immersions que nous allons considérer dans cet article, cette borne supérieure, qui vaudra  $\omega_n$ , ne sera pas atteinte. C'est la raison pour laquelle les inégalités du théorème 1.3 et du corollaire 1.14 sont strictes.

On est ainsi ramené au problème de construire une immersion de  $M \rightarrow S^m$  dont le volume reste strictement inférieur à  $\omega_n$  sous l'action du groupe de Möbius.

Pour illustrer l'efficacité de cette technique, nous allons montrer dès à présent le théorème 1.3 pour la première valeur propre de Neumann (on verra comment adapter la démonstration au cas de la première valeur propre de Steklov au paragraphe suivant, cf. remarque 2.13), ainsi que le théorème 1.13, dans le cas d'un domaine de l'espace euclidien, hyperbolique ou de la sphère :

**Théorème 2.4.** *Soit  $M$  un domaine (strict) de  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$  ou  $H^n$ . Alors*

1. *la classe conforme  $C$  de la métrique canonique sur  $M$  vérifie  $V_c(M, C) = \omega_n$  et pour toute métrique  $g \in C$ ,  $\lambda_1(M^n, g) \text{Vol}(M^n, g)^{2/n} < n\omega_n^{2/n}$  ;*
2.  *$\nu(M) = n\omega_n^{2/n}$  ;*
3.  *$V_{\mathcal{M}}(M) = \omega_n$ .*

**Démonstration :** Dans le cas d'un domaine de  $S^n$ , l'immersion considérée est simplement l'identité. Sous l'action du groupe de Möbius, le domaine  $M$  reste un domaine strict, donc son volume reste strictement inférieur à  $\omega_n$ . On déduit du lemme 2.1 que  $\lambda_1(M, g) \text{Vol}(M, g)^{2/n} < n\omega_n^{2/n}$  pour toute métrique  $g \in C$ . Par définition du volume conforme, on en déduit aussi que  $V_c(M, C) \leq \omega_n$ . Les autres résultats du théorème découlent des inégalités générales  $\omega_n \leq V_{\mathcal{M}}(M) \leq V_c(M, C)$  et  $n\omega_n^{2/n} \leq \nu(M) \leq nV_{\mathcal{M}}(M)^{2/n}$  montrée dans [ESI86], [FN99] et [Ja08].

Si  $M$  est un domaine de  $\mathbb{R}^n$  la projection stéréographique donne une immersion conforme dans  $S^n$ , et si  $M$  est un domaine de  $H^n$  on utilise le fait que  $H^n$  est conforme à un hémisphère de  $S^n$ . Le reste de la démonstration est identique. ■

## 2.2. Première valeur propre de Steklov

Le problème des valeurs propres de Steklov consiste à résoudre l'équation

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M \end{cases} \quad (2.5)$$

où  $\nu$  est un vecteur unitaire sortant normal au bord et  $\rho \in C^\infty(\partial M)$  une fonction densité fixée. On note  $\mathcal{M}(\partial M) = \int_{\partial M} \rho dv_g$  (si  $\rho = 1$  on parle de problème de Steklov homogène, et on a dans ce cas  $\mathcal{M}(\partial M) = \text{Vol}(\partial M, g)$ ). L'ensemble des réels  $\sigma$  solutions du problème forme un spectre discret positif noté

$$0 = \sigma_0(M, g, \rho) < \sigma_1(M, g, \rho) \leq \sigma_2(M, g, \rho) \dots \quad (2.6)$$

Dans le cas homogène, le spectre de Steklov est aussi connu comme étant le spectre de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann. Le problème de Steklov, déjà étudié à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et au début du XX<sup>e</sup> (voir [St99], [St02] et les références qui y sont données), apparaît dans divers problèmes physiques, par exemple il permet de modéliser l'évolution d'une membrane libre dont la masse se concentre sur son bord, et intervient dans certains problèmes de tomographie. Concernant les bornes conformes des  $\sigma_i$  pour tout  $i$ , on peut consulter [Ha11].

Dans [FS11], A. Fraser et R. Schoen ont montré la majoration conforme suivante, dans le cas homogène :

$$\sigma_1(M, g) \text{Vol}(\partial M, g) \text{Vol}(M)^{\frac{2-n}{n}} \leq n V_{rc}(M)^{2/n} \quad (2.7)$$

où  $V_{rc}(M)$  est un invariant conforme, baptisé volume conforme relatif, défini par

$$V_{rc}(M, [g]) = \inf_{\substack{m \geq 1 \\ \varphi: (M, [g]) \hookrightarrow B^{m+1}}} \sup_{\gamma \in G_m} \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)), \quad (2.8)$$

où  $B^{m+1}$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^{m+1}$  et  $\varphi$  parcourt l'ensemble des immersions conformes dans la boule  $B^{m+1}$  telles que  $\varphi(\partial M) \subset S^m$ . On utilise le fait que l'action du groupe de Möbius sur la sphère  $S^m$  s'étend naturellement en une action conforme sur  $B^{m+1}$ .

En considérant le cas particulier des immersions  $\varphi : M \rightarrow S^m$ , il est clair que  $V_{rc}(M) \leq V_c(M)$ . On peut donc déduire immédiatement une majoration de  $\sigma_1(M)$  en fonction du volume conforme dans le cas homogène. On va maintenant montrer l'inégalité (2.7) dans le cas non homogène :

**Théorème 2.9.** *Soit  $(M, g)$  une variété compacte à bord et  $\rho \in C^\infty(\partial M)$  une fonction. Si on note  $\sigma_1(M, g, \rho)$  la première valeur propre non nulle du problème de Steklov avec densité  $\rho$ , alors*

$$\sigma_1(M, g, \rho) \mathcal{M}(\partial M) \text{Vol}(M)^{\frac{2-n}{n}} \leq n V_{rc}(M)^{2/n}.$$

**Démonstration :** Rappelons d'abord que la valeur propre  $\sigma_1(M, g, \rho)$  possède la caractérisation variationnelle suivante (cf. [Ba80]) :

$$\sigma_1(M, g, \rho) = \inf_{f \neq 0} \frac{\int_M |df|^2 dv_g}{\int_{\partial M} f^2 \rho dv_g} \quad \text{où} \quad \int_{\partial M} f \rho dv_g = 0. \quad (2.10)$$

Soit  $\varphi : M \rightarrow B^{m+1}$  une immersion conforme telle que  $\varphi(\partial M) \subset S^m$ . Selon le lemme 2.1 de [ESI92], il existe un élément  $\gamma \in G_m$  tel que si on note  $\tilde{\varphi} = \gamma \circ \varphi$ , les coordonnées  $\tilde{\varphi}_i$  de  $\tilde{\varphi}$  vérifient  $\int_{\partial M} \tilde{\varphi}_i \rho dv_g = 0$ . En appliquant le principe variationnel (2.10) aux fonctions  $\tilde{\varphi}_i$  on obtient  $\sigma_1(M, g, \rho) \int_{\partial M} \tilde{\varphi}_i^2 \rho dv_g \leq \int_M |d\tilde{\varphi}_i|^2 dv_g$ . Après sommation, en utilisant le fait que  $\sum_i \tilde{\varphi}_i^2 = 1$  sur  $\partial M$  et en appliquant une inégalité de Hölder, on obtient par un calcul devenu classique

$$\sigma_1(M, g, \rho) \leq \frac{\sum_i \int_M |d\tilde{\varphi}_i|^2 dv_g}{\sum_i \int_{\partial M} \tilde{\varphi}_i^2 \rho dv_g} \leq \frac{\left( \int_M (\sum_i |d\tilde{\varphi}|^2)^{n/2} dv_g \right)^{2/n}}{\mathcal{M}(\partial M) \text{Vol}(M, g)^{(2-n)/n}}. \quad (2.11)$$

Comme l'immersion  $\tilde{\varphi}$  est conforme, on a aussi  $\tilde{\varphi}^*(g_{\text{eucl}}) = \frac{1}{n} (\sum_i |d\tilde{\varphi}|^2) g$  et donc

$$\left( \int_M \left( \sum_i |d\tilde{\varphi}|^2 \right)^{n/2} dv_g \right)^{2/n} = n \text{Vol}(\tilde{\varphi}(M))^{2/n} = n \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M))^{2/n}. \quad (2.12)$$

Par définition,  $\text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M))$  est majoré par  $V_{rc}(M)$ , ce qui permet de conclure.  $\blacksquare$

**Remarque 2.13.** L'inégalité (1.5) du théorème 1.3 se démontre de la même manière que l'inégalité (1.4) en remplaçant le lemme 2.1 par les inégalités (2.11) et (2.12). En particulier, le cas des domaines euclidiens se traîne comme dans le théorème 2.4.

### 3. Première valeur propre des surfaces à bord

Comme dans [Ja08], nous allons commencer par reformuler le problème en projetant stéréographiquement la sphère  $S^m$  sur  $\mathbb{R}^m$ . Rappelons d'abord



que si  $\gamma$  est un élément quelconque de  $G_m$  et  $r$  une isométrie de la sphère  $S^m$ , alors  $\text{Vol}(r \circ \gamma \circ \varphi(M)) = \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M))$  pour toute immersion  $\varphi$  de  $M$  dans  $S^m$ . On peut donc se ramener à étudier l'action d'un sous-ensemble  $G'_m$  de  $G_m$  (pas nécessairement un sous-groupe) tel que tout élément de  $G_m$  s'écrive sous la forme  $r \circ \gamma$  avec  $\gamma \in G'_m$  et  $r \in \text{SO}(m)$ .

Il existe plusieurs choix possibles pour  $G'_m$ , mais l'un d'entre eux est particulièrement adapté à la démonstration qui suit. En projetant stéréographiquement la sphère  $S^m$  sur  $\mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ , on se ramène à considérer des immersions  $\varphi : M \hookrightarrow \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$  en calculant les volumes pour la métrique  $g^{S^m} = \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2} g_{\text{eucl}}$  où  $g_{\text{eucl}}$  désigne la métrique euclidienne canonique. On peut alors choisir pour  $G'_m$  l'ensemble des homothéties et des translations de  $\mathbb{R}^m$  (voir le théorème 3.5.1 de [Be83]).

La difficulté par rapport au cas des domaines traité dans la section précédente est de trouver une immersion de  $M$  dans une sphère telle que le volume de l'immersion reste strictement inférieure à  $\text{Vol}(S^n, g_{\text{can}})$  sous l'action du groupe de Möbius. Le reste de la démonstration est identique.

On va donc montrer l'existence d'une telle immersion dans le cas où  $n = 2$  :

**Théorème 3.1.** *Soit  $M$  une surface compacte à bord. Il existe une immersion  $\varphi : M \rightarrow S^3$  telle que  $\text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) < 4\pi$  pour tout élément  $\gamma$  du groupe de Möbius  $G_3$  de  $S^3$ .*

**Démonstration :** Toute surface compacte à bord (à l'exception du disque, qui entre dans le cadre du théorème 2.4) peut être réalisée comme réunion de rubans comme sur la figure 1. On peut le montrer par récurrence en constatant qu'ajouter un ruban va soit créer une nouvelle composante de bord (si les deux extrémités du ruban sont collées sur la même composante de bord avec la même orientation), soit faire la somme connexe avec un plan projectif (ruban collé sur le même bord sans préserver l'orientation), soit supprimer une composante de bord et augmenter le genre de 1 (ruban joignant deux bords distincts). Par exemple, la figure 1 représente un tore privé de deux disques.

On se donne une telle réalisation plongée dans  $\mathbb{R}^3$  avec la contrainte que la largeur des rubans (pour la métrique euclidienne  $g_{\text{eucl}}$ ) est égale à un paramètre  $\varepsilon > 0$  qu'on choisira petit par rapport au rayon de courbure des rubans. On lisse le bord à la jonction des rubans et on note  $\varphi : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  le plongement obtenu.

La clef de la démonstration est que si  $\gamma \in G'_3$ , l'aire des parties de  $\gamma \circ \varphi(M)$  projetées près de  $\infty$  devient négligeable pour la métrique  $g_{S^3}$ , même si le

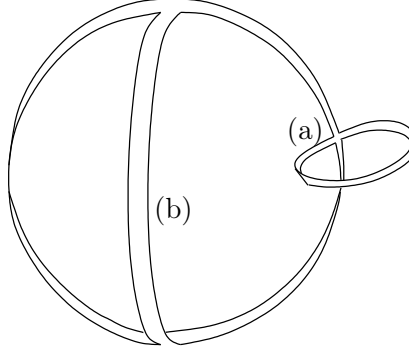


FIGURE 1 –

rapport d'homothétie de  $\gamma$  est grand (cf. [Ja08]). En effet, une homothétie de rapport  $R$  va multiplier l'aire euclidienne par  $R^2$ , mais dans la formule  $g_{S^3} = \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2} g_{\text{eucl}}$  la norme de  $x$  est de l'ordre de  $R$  pour les parties de  $\varphi(M)$  projeté près de l'infini et donc leur aire devient petite quand  $R$  devient grand (de l'ordre de  $R^{-2}$ ).

Quand  $\varepsilon$  est petit, l'aire de  $\gamma \circ \varphi(M)$  est donc négligeable sauf si le rapport d'homothétie de  $\gamma$  est grand et qu'une partie de  $\gamma \circ \varphi(M)$  reste près de l'origine. On distingue alors deux cas. Le premier est celui où une jonction entre rubans reste près de l'origine (figure 2.a). Au voisinage  $\mathcal{U}$  de cette jonction on peut approximer la surface par le domaine  $\mathcal{D}$  de son plan tangent obtenu en projetant  $\mathcal{U}$ , le volume de  $\mathcal{U}$  est donc strictement plus petit que l'aire de ce plan, à savoir  $4\pi$ . Il reste à montrer que si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, l'aire totale de  $\gamma \circ \varphi(M)$  est aussi strictement inférieure à  $4\pi$ . On peut trouver dans le plan tangent contenant  $\mathcal{D}$  un domaine  $\mathcal{D}'$  dont l'aire est strictement supérieure à  $M \setminus \mathcal{U}$ , en faisant correspondre à chaque élément de surface de  $M \setminus \mathcal{U}$  un élément de surface dans le plan situé plus près de l'origine de  $\mathbb{R}^3$ . Comme le facteur conforme entre les métriques sphérique et euclidienne ne dépend que de la distance à l'origine, on peut choisir ce domaine tel que son aire reste strictement plus grande à celle de  $M \setminus \mathcal{U}$  quand le rapport d'homothétie augmente. Si  $\varepsilon > 0$  est suffisamment petit, le domaine  $\mathcal{D}'$  ne rencontre pas  $\mathcal{D}$  dans le plan tangent, et donc  $\text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) \leq \text{Vol}(\mathcal{U}) + \text{Vol}(M \setminus \mathcal{U}) \leq \text{Vol}(\mathcal{D}) + \text{Vol}(\mathcal{D}') < 4\pi$ .

Dans le deuxième cas, c'est une portion de ruban qui rest près de l'origine quand on applique  $\gamma$  à  $\varphi(M)$  (figure 2.b). Comme on a choisit  $\varepsilon$  petit par rapport au rayon de courbure des rubans, on peut approcher la portion de ruban par son plan tangent, et conclure que son aire est strictement inférieure

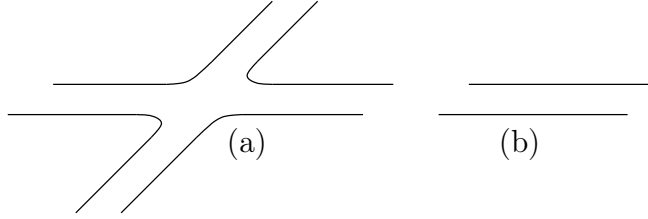


FIGURE 2 –

à  $4\pi$ . L'aire totale de  $\gamma \circ \varphi(M)$  est aussi inférieure à  $4\pi$  pour les mêmes raisons que précédemment. ■

#### 4. Variétés à bord de dimension quelconque

La démonstration en dimension quelconque utilise des arguments géométriques semblables à ceux de dimension 2, mais les arguments topologiques sont plus techniques. Dans le même esprit que [Ja08], on fera appel à une décomposition en anses de la variété. On se référera aux livres [Ra02] (chapitres 1, 2 et 6) et [Ko93] (chapitre VI et VII) pour les aspects topologiques de la démonstration.

Soit  $M$  une variété compacte à bord et  $S^{k-1} \hookrightarrow \partial M$  une sphère plongée dans le bord de  $M$  dont le fibré normal (dans  $\partial M$ ) est trivial. Un voisinage tubulaire de  $S^{k-1}$  dans  $\partial M$  est alors un produit trivial  $S^{k-1} \times B^{n-k}$ . Ajouter une  $k$ -anse le long de  $S^{k-1}$  consiste à coller une variété produit  $B^k \times B^{n-k}$  (dont le bord est la réunion des deux variétés  $B^k \times S^{n-k-1}$  et  $S^{n-1} \times B^{n-k}$  recollées le long de  $S^{n-1} \times S^{n-k-1}$ ) sur un voisinage tubulaire de la sphère  $S^{k-1}$ . C'est un résultat classique de la théorie du cobordisme qu'on peut obtenir n'importe quelle variété connexe compacte à bord par adjonctions successives d'un nombre fini d'anses à partir d'une boule ([Ra02] théorème 2.2; [Ko93] ch. VII, théorème 1.1 et 1.2). En outre, on peut faire en sorte qu'on n'ait pas à utiliser de  $n$ -anse, c'est-à-dire à « boucher » un bord en y collant une boule ([Ko93], ch. VII, théorème 6.1). La démonstration des théorèmes 1.3 et 1.13 va consister à raisonner par récurrence sur le nombre d'anses. Comme en dimension 2, il suffit de montrer l'existence d'une immersion dont le volume est uniformément contrôlé sous l'action du groupe de Möbius :

**Théorème 4.1.** *Soit  $M$  une variété compacte à bord de dimension  $n$ . Il*

existe une immersion  $\varphi : M \rightarrow S^m$  pour un entier  $m$  suffisamment grand telle que  $\text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) < \text{Vol}(S^n, g_{\text{can}})$  pour tout élément  $\gamma$  du groupe de Möbius  $G_m$  de  $S^m$ .

**Démonstration :** Si  $M$  est une boule, n'importe quel plongement  $\varphi : M \rightarrow S^n$  convient.

Supposons qu'une variété à bord  $M$  vérifie la conclusion du théorème ; on va montrer qu'elle reste vraie pour une variété  $\tilde{M}$  obtenue en ajoutant une  $k$ -anse qu'on notera  $\mathcal{A}$ .

On note  $\varphi$  l'immersion de  $M$  dans  $S^m$  telle que  $\text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) < \text{Vol}(S^n, g_{\text{can}})$  pour tout  $\gamma$ . Comme dans le paragraphe précédent, on projette stéréographiquement  $S^m$  sur  $\mathbb{R}^m \cup \infty$  et on se restreint aux éléments  $\gamma \in G'_m$ . On construit une immersion  $\tilde{\varphi}$  de  $\tilde{M}$  en collant une anse  $\mathcal{A} = B^k \times B^{n-k}$  sur  $\varphi(M)$  (pour ne pas alourdir le texte, on identifiera temporairement les variétés à leur immersion). Le long la sphère d'attache  $S^{k-1} \hookrightarrow \partial M$ , on commence par coller une boule  $B^k$  de manière à ce que le long de  $S^{k-1}$ , l'espace tangent à  $B^k$  soit contenu dans l'espace tangent de  $M$ . Quitte à augmenter la dimension de la sphère  $S^m$ , on peut faire en sorte que  $B^k$  ne rencontre pas  $M$  (c'est-à-dire que  $M \cup B^k$  est plongée). L'anse  $B^k \times B^{n-k}$  est ensuite obtenue en épaississant  $B^k$  et en lissant  $\tilde{M}$  le long de l'attache de l'anse. Si le rayon  $\varepsilon$  (pour la métrique euclidienne de  $R^m$ ) de  $B^{n-k}$  est suffisamment petit, L'immersion  $\tilde{\varphi}$  de  $\tilde{M}$  ainsi obtenue est un plongement.

Il reste choisir  $\varepsilon$  de manière à contrôler le volume de ce plongement quand on fait agir le groupe  $G'_m$ . Il est clair que sous l'action des translations le volume de  $M$  atteint un maximum (en effet, le volume de  $\gamma \cdot M$  tend alors vers zéro à l'infini pour la métrique  $g_{S^m}$ ). Ce maximum est strictement plus petit que  $\text{Vol}(S^n, g_{\text{can}})$  par hypothèse, et le volume de l'anse reste majoré par une borne qui tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0 (il est essentiel ici pour contrôler le volume de la  $k$ -anse que  $k$  soit différent de  $n$ ). On peut donc choisir  $\varepsilon$  de sorte que le volume de  $\tilde{M}$  reste strictement plus petit que  $\text{Vol}(S^n, g_{\text{can}})$  sous l'action des translations.

On est donc ramené à l'étude du volume sous l'action des homothéties. On notera  $\gamma_{x,R}$  l'homothétie centrée en  $x$  et de rapport  $R$ . Le problème est de majorer le volume de  $\tilde{M}$  quand  $x \in \tilde{M}$  et  $R$  est grand (si  $R$  est inférieur à une borne donnée, on peut rendre le volume de l'anse négligeable et conclure comme dans le cas des translations). On va distinguer trois cas, selon que  $x$  est dans  $M$ , dans l'anse  $\mathcal{A}$  ou à la jonction des deux.

Supposons que  $x$  soit dans  $M$ . On note  $\mathcal{B}$  une petite boule entrée en  $x$  et contenu dans  $M$ . Le volume de  $\gamma_{x,R} \circ \tilde{\varphi}(\tilde{M})$  se décompose en la somme  $\text{Vol}(\gamma_{x,R}(\mathcal{B})) + \text{Vol}(\gamma_{x,R}(M \setminus \mathcal{B})) + \text{Vol} \gamma_{x,R}(\mathcal{A})$ . Quand  $R$  tend vers l'infini,

$\text{Vol}(\gamma_{x,R}(\mathcal{B}))$  tend vers  $\omega_n$  et  $\text{Vol}(\gamma_{x,R}(M \setminus \mathcal{B})) + \text{Vol} \gamma_{x,R}(\mathcal{A})$  tend vers 0. Au voisinage de  $\infty$ ,  $\gamma_{x,R}$  se comporte infinitésimalement comme une homothétie de rapport  $1/R$ , donc les volumes de  $M \setminus \mathcal{B}$  et  $\mathcal{A}$  se comportent asymptotiquement de la même manière. Comme  $\text{Vol}(\gamma_{x,R}(\mathcal{B})) + \text{Vol}(\gamma_{x,R}(M \setminus \mathcal{B}))$  reste toujours strictement inférieur à  $\omega_n$ , on peut donc trouver un  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que le volume de  $\gamma_{x,R}(M)$  le soit aussi, quitte à contracter légèrement les anses précédemment ajoutées et réduire ainsi  $\text{Vol}(\gamma_{x,R}(M \setminus \mathcal{B}))$  (ce raisonnement est *a fortiori* vrai si  $x$  est sur le bord de  $M$  puisque  $\gamma_{x,R}(\mathcal{B})$  peut alors être approché par un demi-espace). Par compacité de  $M$  on peut trouver un tel  $\varepsilon > 0$  indépendant de  $x$ .

Si  $x$  est sur le bord de  $M$  et près de la jonction avec l'anse  $\mathcal{A}$ , son voisinage peut-être localement approché par la réunion d'un demi-espace de dimension  $n$  (la variété  $M$ ) et d'un demi-plan de dimension  $k$  qui a été épaissi, tous deux contenus dans un même  $n$ -plan (figure 3). Quand  $R$  devient grand,

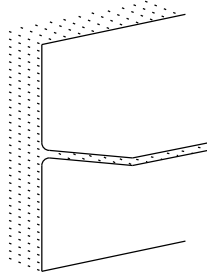


FIGURE 3 – Voisinage de l'attache d'une anse

le volume de  $\gamma_{x,R}(M)$  tend vers celui d'un demi-espace, qui sera plus petit que  $\omega_n$ . On peut alors raisonner comme on l'a fait en dimension 2 : dans le demi  $n$ -plan complémentaire de  $M$ , on peut trouver un domaine dont le volume majorera strictement celui de l'anse quel que soit  $R$ .

Enfin, si  $x$  est sur l'anse, son voisinage pour  $R$  grand aura l'allure d'un  $k$ -espace épaissi. On peut alors raisonner comme précédemment. ■

Les théorèmes 1.3 et 1.13 se déduisent du théorème 4.1 exactement comme dans les sections 2 et 3.

## 5. Grandes valeurs propres du laplacien de Dirichlet

On va maintenant démontrer le théorème 1.9. On va en fait prouver un résultat plus général, à savoir qu'on peut faire tendre toutes les valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham vers l'infini en fixant le volume et la classe conforme, à l'exception des valeurs propres du laplacien de Neumann.

Rappelons quelques définitions. Le laplacien de Hodge-de Rham, qui agit sur les formes différentielles de la variété  $M$ , est défini par

$$\Delta = d\delta + \delta d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M), \quad (5.1)$$

où  $d$  désigne la différentielle extérieure et  $\delta$  sont adjoint  $L^2$ . On considérera la condition de bord suivante, dite absolue, en notant  $j$  l'inclusion  $\partial M \hookrightarrow M$  et  $N$  un champ de vecteur normal au bord :

$$(A) \quad \begin{cases} j^*(\iota_N \omega) = 0 \\ j^*(\iota_N d\omega) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

On notera  $0 = \lambda_{p,0}(M, g) < \lambda_{p,1}(M, g) \leq \lambda_{p,2}(M, g) \leq \dots$  son spectre en restriction aux  $p$  formes, en répétant les valeurs propres non nulles s'il y a multiplicité (la multiplicité de la valeur propre nulle, si elle existe, est un invariant topologique : c'est le nombre de Betti  $b_p(M)$ ).

Avec la condition de bord (A), le laplacien de Hodge-de Rham restreint aux 0-formes, c'est-à-dire aux fonctions, est le laplacien de Neumann. En degré  $p = n$ , les valeurs propres sont celles du laplacien de Dirichlet. En effet, si  $f$  est une fonction et  $dv_g$  la forme volume, alors  $\Delta(f dv_g) = (\Delta f) dv_g$ , et  $f dv_g$  vérifie la condition (A) si et seulement si  $f$  vérifie la condition de Dirichlet.

**Théorème 5.3.** *Soit  $M^n$  une variété compacte à bord de dimension  $n \geq 2$ . Pour toute classe conforme  $C$  sur  $M^n$ , il existe une famille de métrique  $g_t \in C$ ,  $t > 0$  telle que, pour tout  $p \geq 2$ , on a  $\lambda_{p,1}(M, g_t) \text{Vol}(M, g_t)^{2/n} \rightarrow +\infty$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .*

**Remarque 5.4.** On ne peut pas faire tendre  $\lambda_{1,1}(M, g_i) \text{Vol}(M, g_i)^{2/n}$  vers l'infini. En effet, comme la différentielle extérieure commute avec le laplacien, le spectre restreint aux 1-formes contient le spectre du laplacien de Neumann.

**Remarque 5.5.** Sur les variétés closes, on sait qu'on peut faire tendre  $\lambda_{p,1}(M) \text{Vol}(M)^{2/n}$  vers l'infini en fixant le volume et la classe conforme,

mais seulement pour  $p \in [2, n - 2]$  (voir [CES06]). La méthode, devenue classique pour faire tendre les valeurs propres de certains opérateurs vers l'infini, consiste à déformer une petite boule de la variété en un cylindre très long (cf. [GP95], [AB00], [CES06], [AJ12]). Nous allons ici adapter cette technique à la présence d'un bord.

**Démonstration :** On procédera en trois étapes. D'abord, se ramènera au cas où la métrique est euclidienne au voisinage d'un point du bord. On construira ensuite une famille de métrique qui fait tendre le volume vers l'infini et on montrera enfin que le spectre de la variété est uniformément minoré pour cette famille de métrique.

La première étape se base sur le résultat J. Dodziuk [Do82] selon lequel, si deux métriques sont proches pour la distance de Lipschitz, alors leurs spectres sont proches aussi. Plus précisément, si deux métriques  $g$  et  $\tilde{g}$  vérifient  $\tau^{-1}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$ , alors  $\tau^{-(3n-1)}\lambda_{p,1}(M, \tilde{g}) \leq \lambda_{p,1}(M, g) \leq \tau^{3n-1}\lambda_{p,1}(M, \tilde{g})$  et  $\tau^{-n/2}\text{Vol}(M, \tilde{g}) \leq \text{Vol}(M, g) \leq \tau^{n/2}\text{Vol}(M, \tilde{g})$ . Si  $h \in C^\infty(M)$  est une fonction strictement positive et que  $\tau^{-1}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$ , alors on a aussi  $\tau^{-1}hg \leq \tilde{h}g \leq \tau hg$ . On peut en déduire que si on peut faire tendre  $\lambda_{p,1}(M, hg)\text{Vol}(M, hg)^{2/n}$  vers l'infini en faisant varier  $h$ , alors  $\lambda_{p,1}(M, h\tilde{g})\text{Vol}(Mh\tilde{g})^{2/n}$  tend aussi vers l'infini. Autrement dit, il suffit de montrer le théorème 1.9 pour une classe conforme particulière, le résultat général s'en déduit.

On peut donc se placer dans le cas où la classe conforme contient une métrique  $g$  qui est euclidienne dans un voisinage d'un point du bord. On peut alors adapter la construction de [CES06] dans ce contexte. On sait qu'une boule euclidienne peut être déformée de manière conforme en la réunion d'un cylindre et d'un hémisphère. Plus précisément, si on note  $r$  la coordonnée radiale sur la boule euclidienne  $B(\varepsilon, g_{\text{eucl}})$  de rayon  $\varepsilon$  et qu'on pose

$$h_\varepsilon(r) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{r} & \text{si } \varepsilon e^{-\frac{L}{\varepsilon}} \leq r \leq \varepsilon, \\ e^{\frac{L}{\varepsilon}} & \text{si } 0 \leq r \leq \varepsilon e^{-\frac{L}{\varepsilon}}, \end{cases} \quad (5.6)$$

alors la boule  $B(\varepsilon, h_\varepsilon^2 g_{\text{eucl}})$  est isométrique à la réunion d'un cylindre de rayon  $\varepsilon$  et de longueur  $L$  et d'un hémisphère de rayon  $\varepsilon$ . Appliquée à une demi-boule centré en un point du bord et en prolongeant la fonction  $h_\varepsilon$  par 1 en dehors de cette demi-boule, cette déformation conforme crée un demi-cylindre de longueur  $L$  au bout duquel est collé un quart de sphère, comme sur la figure 4. On note  $g_L$  la métrique obtenue.

On peut alors minorer le spectre de la variété obtenue par la même technique que dans [GP95] et [CES06]. On recouvre la variété  $M$  par trois ouverts

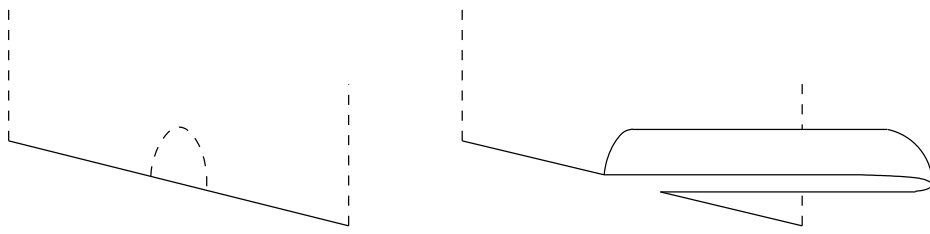


FIGURE 4 – déformation de la métrique sur le bord de la variété

$U_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  définis de la manière suivante :  $U_1$  est formé de la réunion de  $M \setminus B(\varepsilon)$  et d'une portion du demi-cylindre de longueur 1, l'ouvert  $U_2$  est formé du demi-cylindre de longueur  $L$  et  $U_3$  est formé du quart de sphère et de d'une portion de demi-cylindre adjacente de longueur 1.

Les intersection  $U_1 \cap U_2$  et  $U_2 \cap U_3$  sont topologiquement le produit d'un intervalle et d'une boule, leur cohomologie est donc triviale en degré  $p \geq 1$  (y compris en degré  $n$  et  $n - 1$ , à la différence de la construction de [CES06]), ce qui permet d'appliquer le lemme de McGowan [Mc93] (Plus précisément, on utilise l'énoncé donné dans [GP95], lemme 1) pour tout les degrés  $p \geq 2$  : il existe des constantes  $a, b, c > 0$  ne dépendant pas de  $L$  telles que

$$\lambda_{p,1}(M, g_L) \geq \frac{a}{\frac{b}{\mu_p(U_2)} + c} \text{ pour } p \geq 2, \quad (5.7)$$

où  $\mu(U_2)$  désigne la plus petite valeur propre non nulle du laplacien de Hodge sur  $U_2$  en degré  $p$  (avec la condition de bord absolue).

Comme l'ouvert  $U_2$  est un produit riemannien, son spectre est déterminé par la formule de Künneth et on peut montrer que  $\mu(U_2)$  est minoré indépendamment de  $L$  (le calcul est le même que dans [GP95] et [CES06]).

On obtient finalement que  $\lambda_{p,1}(M, g_L)$  reste uniformément minoré pour  $p \geq 2$  quand  $L \rightarrow +\infty$  tandis que  $\text{Vol}(M, g_L) \rightarrow +\infty$ , ce qui permet de conclure. ■

## Références

- [AB95] M. ASHBAUGH et R. BENGURIA – « Sharp upper bound to the first nonzero Neumann eigenvalue for bounded domains in spaces of constant curvature », *J. London Math. Soc. (2)*, 52 (2), p. 402–416, 1995.
- [AB00] B. AMMANN et C. BÄR – « Dirac eigenvalues and total scalar curvature », *J. Geom. Phys.*, 33, p. 229–234, 2000, math.DG/9909061.



- [AJ12] B. AMMANN et P. JAMMES – « The supremum of first eigenvalues of conformally covariant operators in a conformal class », Dans *Variational Problems in Differential Geometry*, volume 394 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 1–23, Cambridge University Press, 2012, arXiv :0708.0529.
- [Ba80] C. BUNDLE – *Isoperimetric inequalities and applications*, volume 7 de *Monographs and Studies in Mathematics*, Pitman, 1980.
- [Be83] A. BEARDON – *The geometry of discrete groups*, Springer Verlag, 1983.
- [BM01] R. BROOKS et E. MAKOVER – « Riemann surfaces with large first eigenvalue », *J. Anal. Math.*, 83, p. 243–258, 2001.
- [Bu84] P. BUSER – « On the bipartition of graphs », *Discrete Appl. Math.*, 9 (1), p. 105–109, 1984.
- [CD94] B. COLBOIS et J. DODZIUK – « Riemannian metrics with large  $\lambda_1$  », *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122 (3), p. 905–906, 1994.
- [CES03] B. COLBOIS et A. EL SOUFI – « Extremal eigenvalues of the Laplacian in a conformal class of metrics : the “conformal spectrum” », *Ann. Global Anal. Geom.*, 23 (4), p. 337–349, 2003, math.DG/0409316.
- [CES06] B. COLBOIS et A. EL SOUFI – « Eigenvalues of the laplacian acting on  $p$ -forms and metric conformal deformations », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 134 (3), p. 715–721, 2006, math.DG/0409242.
- [CESG11] B. COLBOIS, A. EL SOUFI et A. GIROUARD – « Isoperimetric control of the Steklov spectrum », *J. Funct. Anal.*, 261 (5), p. 1384–1399, 2011, arXiv :1103.2863.
- [Do82] J. DODZIUK – « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 85 (3), p. 438–443, 1982.
- [ESGJ06] A. EL SOUFI, H. GIACOMINI et M. JAZAR – « A unique extremal metric for the least eigenvalue of the Laplacian on the Klein bottle », *Duke Math. J.*, 135 (1), p. 181–202, 2006.
- [ESI86] A. EL SOUFI et S. ILIAS – « Immersions minimales, première valeur propre du laplacien et volume conforme », *Math. Ann.*, 275 (2), p. 257–267, 1986.
- [ESI92] A. EL SOUFI et S. ILIAS – « Majoration de la seconde valeur propre d’un opérateur de Schrödinger sur une variété compacte et applications », *J. Funct. Anal.*, 103 (2), p. 294–316, 1992.
- [FN99] L. FRIEDLANDER et N. NADIRASHVILI – « A differential invariant related to the first eigenvalue of the Laplacian », *Internat. Math. Res. Notices*, 17, p. 939–952, 1999.
- [FS11] A. FRASER et R. SCHOEN – « The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces », *Adv. Math.*, 226 (5), p. 4011–4030, 2011.

- [Gi09] A. GIROUARD – « Fundamental tone, concentration of density to points and conformal degeneration on surfaces », *Canad. J. Math.*, 61 (3), p. 548–565, 2009, math.SP/0510279.
- [GP95] G. GENTILE et V. PAGLIARA – « Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree  $p$  », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 123 (12), p. 3855–3858, 1995.
- [Ha11] A. HASSANNEZHAD – « Conformal upper bounds for the eigenvalues of the Laplacian and Steklov problem », *J. Funct. Anal.*, 261 (11), p. 3419–3436, 2011.
- [He70] J. HERSCH – « Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 270, p. A1645–A1648, 1970.
- [Ja08] P. JAMMES – « Première valeur propre du laplacien, volume conforme et chirurgies », *Geom. Dedicata*, 135, p. 29–37, 2008, arXiv :0801.2638.
- [KN10] G. KOKAREV et N. NADIRASHVILI – « On first Neumann eigenvalue bounds for conformal metrics », Dans *Around the research of Vladimir Maz'ya. II*, volume 12 de *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, pages 229–238, Springer, 2010.
- [Ko93] A. KOSINSKI – *Differential manifolds*, Academic Press Inc., 1993.
- [LY82] P. LI et S.T. YAU – « A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces », *Invent. Math.*, 69 (2), p. 269–291, 1982.
- [Mc93] J. MCGOWAN – « The  $p$ -spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds », *Math. Ann.*, 297 (4), p. 725–745, 1993.
- [Mu80] H. MUTÔ – « The first eigenvalue of the Laplacian on even-dimensional spheres », *Tôhoku Math. J. (2)*, 32 (3), p. 427–432, 1980.
- [Na96] N. NADIRASHVILI – « Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces », *Geom. Funct. Anal.*, 6 (5), p. 877–897, 1996.
- [Ra02] A. RANICKI – *Algebraic and geometric surgery*, Oxford University Press, 2002.
- [St99] W. STEKLOFF – « Sur l'existence des fonctions fondamentales », *C. R. Acad. Sci. Paris*, 128 (1), p. 808–810, 1899.
- [St02] W. STEKLOFF – « Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique (suite et fin) », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 19 (2), p. 455–490, 1902.
- [Ta79] S. TANNO – « The first eigenvalue of the Laplacian on spheres », *Tôhoku Math. J. (2)*, 31 (2), p. 179–185, 1979.
- [We54] R. WEINSTOCK – « Inequalities for a classical eigenvalue problem », *J. Rational Mech. Anal.*, 3, p. 745–753, 1954.

Pierre JAMMES  
Laboratoire J.-A. Dieudonné  
Université Nice Sophia Antipolis — CNRS (UMR 7351)  
Parc Valrose  
06108 Nice Cedex 02, France  
`pjammes@unice.fr`